ANALISIS PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIALORDE-2 DENGAN MENGGUNAKAN METODE PD HOMOGEN-TAK HOMOGEN DAN TEKNIK OPERATOR-D

Ibnu Maja, S.Si.,M.M
Staf UP.MPK , Politeknik Negeri Sriwijaya Palembang
ibnumaja76@yahoo.co.id

Abstraks

Analisis penyelesaian PD orde-2 membahas tiga kasus yang diselesaikan dengan dua metode. yaitu dengan persamaan diferensial homogen-tak homogen dan teknik operator-D. Langkah penyelesaian PD orde dua dengan PD linear homogen-tak homogen adalah: menentukan solusi umum PD Homogen $ay'' + by' + cy = g(x)$ yaitu $ar^2 + br + c = 0$, solusi umum sesuai dengan akar-akar persamaan karakteristik, kemudian subtitusikan y_p, y'_p, y''_p pada PD tak homogen sehingga diperoleh solusi khusus y_p diperoleh hasil akhir solusi umum PD orde-2: $y = y_h + y_p$ Langkah selanjutnya dengan Teknik Operator yaitu mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)\, y_p = Q$, mengeliminasikan persamaan untuk menentukan nilai y_p yaitu: $y_p = \frac{1}{F(D)} Q$ menentukan fungsi komplementer , menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator-D sehingga diperoleh solusi umum yaitu : $y = Fungsi \;\; komplementer + Integral \;\; khusus$

Kata Kunci : PD Linier Homogen, PD Linier Tak Homogen, Teknik Operator, Fungsi Komplementer, Integral khusus.

Abstracs

Analysis of order completion PD-2 discusses three cases resolved by the two methods. namely differential equations with homogeneous-inhomogeneous and operator-D technique. Step completion PD second order with PD linear homogeneous-inhomogeneous is: define a common solution PD Homogeneous $ay'' + by' + cy = g(x)$ namely, $ar^2 + br + c = 0$ the common solution in accordance with the roots of the characteristic equation, then subtitusikan y_p, y'_p, y''_p in PD is not homogeneous in order to obtain a special solution the final result of common solutions PD-order 2 : $y = y_h + y_p$ the next step in operator technique is transform into a differential equation system operator technique, namely $F(D)\, y_p = Q$, to eliminate the equation to determine the value y_p that is: $y_p = \frac{1}{F(D)} Q$, determine the complementary function, specifically by using the integral determines the properties of the operator-D techniques in order to obtain the general solution is: $y = Fungsi \;\; komplementer + Integral \;\; khusus$

Keywords : Homogeneous Linear PD, PD Homogeneous Linear Tak, operator technique, complementary functions, special Integral

1. LATAR BELAKANG

Persamaan diferensial dengan bentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan g adalah fungsi-fungsi dari variable bebas x, $a_n \neq 0$ dan $g_n \neq 0$ merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial linier tak homogen. System persamaan diferensial homogen adalah sistem yang memuat dua atau lebih persamaan diferensial linear tak homogen. Solusi dari system persamaan diferensial linear tak homogeny ini dapat dicari dengan menggunakan suatu metode tertentu. Salah satu metode yang dapat digunakan yaitu metode koefisien tak tentu.

2. LANDASAN TEORI

Persamaan Diferensial (Finizio & Ladas, 1988)

Persamaan diferensial linear yaitu persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannyayaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah fungsi-fungsi dari variabel bebas x, serta

a. Jika $g(x) = 0$ maka persamaan tersebut homogen

b. Jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut tak homogen

c. Jika seluruh koefisien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta, maka persamaan tersebut dikatakan memiliki koefisien konstan. **(Finizio & Ladas, 1988)**

Persamaan Diferensial Homogen tingkat dua dengan koefisien konstan

Bentuk umum Persamaan Diferensial ini : $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Solusi umum PD ini tergantung pada akar-akar persamaan: $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ yang bersesuaian dengan persamaan diferensial tersebut:

1) Jika akar-akar riel persamaan bantu merupakan dua akar riel yang berlainan yaitu r_1 dan r_1 maka solusi umumnya: $y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$
2) Jika akar-akar riel persamaan bantu merupakan dua akar riel yang berulang yaitu $r_1 = r_2$ maka solusi umumnya:
$$y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, x\, e^{r_1 x} = e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$
3) Jika akar-akar riel persamaan bantu merupakan akar kompleks yang saling konjugat yaitu $r_{12} = \alpha + \beta i$ maka solusi umumnya:

$$y = C_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2\, e^{\alpha x} \sin\, \beta x$$
$$= e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin\, \beta x\right)$$

Metode koefisian Tak Tentu

Metode ini digunakan untuk menghitung suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial tak homogen:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

dengan koefisien-koefisien :

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ merupakan konstanta-konstanta, $a_n \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$ adalah kombinasi linear dari fungsi dengan tipe yang dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1. Metode Koefisien Tak Tentu

Suku-suku dalam $g(x) \neq 0$	**Pilihan untuk** y_p
$k\ e^{\gamma x}$	$k\ e^{\gamma x}$
$k\ x^n$ $(n = 0,1,2,....)$	$K_n\ x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $+ K_1 x + K_0$
$K \cos \omega t$ $K \sin\ \omega t$	$K \cos \omega t + M \sin\ \omega t$

Aturan untuk metode koefisien tak tentu:

a. Aturan Dasar. Jika $g(x)$ adalah salah satu fungsi yang ada dalam tabel, pilih fungsi y_p yang bersesuaian dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubtitusikan y_p pada persamaan awal.

b. Aturan Modifikasi. Jika $g(x)$ sama dengan solusi persamaan diferensial homogen, kalikan y_p yang bersesuaian dalam tabel dengan x (atau x^2 jika $g(x)$ sama dengan solusi akar kembar persamaan diferensial homogen).

c. Aturan Penjumlahan. Jika $g(x)$ adalah jumlah fungsi-fungsi yang terdapat dalam tabel pada kolom pertama, y_p adalah jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian. **(Purcell, 2004)**

Kesimpulan :

a) Metode koefisien tak tentu digunakan penyelesaian khusus PD linear tak homogen dengan koefisien konstanta

b) Untuk dapat menentukan pemisahan yang sesuai harus dicari terlebih dahulu solusi persamaan homogennya.

c) Metode koefisien tektentu hanya dapat digunakan jika fungsi $g(x)$ di ruas kanan adalah polinom, fungsi trigonometri, fungsi ekponensial atau penjumlahan/perkalian dari ketiga fungsi kolom pertama dalam tabel 1.

Persamaan diferensial linear tingkat n berbentuk**: (Spehley, 1974)**

1. $P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots +$

   $P_{n-1} \frac{dx}{dt} + P_n x = Q$

   dimana $P_o \neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ Q adalah fungsi x atau konstanta.

2. $P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots$

   $+ P_{n-1} \frac{dx}{dt} + P_n x = 0$

disebut homogen untuk menunjukkan bahwa semua suku-sukunya berderajat sama (pertama) dalam y dan demikian juga turunan-turunannya.

Persamaan Linear Homogen dengan koefisien konstanta berbentuk:

$$P_o \frac{d^n x}{dt^n} + P_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots$$
$$+ P_{n-1} \frac{dx}{dt} + P_n x = Q$$

dimana $P_o \neq 0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ adalah konstanta-konstanta.Untuk memudah-kan notasi, tulislah:

$$\frac{dx}{dt} = Dx, \ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = D.Dx = D^2x$$

menjadi

$$(P_o\ D^n + P_1\ D^{n-1} + P_2\ D^{n-2} + \ldots +$$
$$P_{n-1}\ D + P_n)\ x = 0$$

maka suatu operator yang bekerja terhadap y dan

$$P_o\ D^n + P_1\ D^{n-1} + P_2\ D^{n-2} + \ldots$$
$$+ P_{n-1}\ D + P_n = 0$$

Persamaan Karakteristik

Persamaan:

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3)$$
$$\ldots (D - m_{n-1})(D - m_n) = 0$$

disebut dengan persamaan karakteristik dan akar-akarnya: $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ disebut akar akar karakteristik. **(Purcell, 2004)**

1. Akar-akar rill yang berbeda $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_{n-1} \neq m_n$

   maka penyelesaiannya adalah

   $y = C_1\ e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \ldots$
   $+ C_n e^{m_n x}$

2. Akar-akar yang berulang $m_1 = m_2 = m_3 \neq \ldots \neq m_{n-1} \neq m_n$

   maka penyelesaiannya adalah

   $y = C_1\ e^{mx} + C_2 x e^{mx} + C_3 x^2 e^{m_3 x} + \ldots + C_n x^{n-1} e^{mx}$

3. Akar-akar kompleks $a \pm bi$ maka penyelesaiannya adalah:

   $A\ e^{(a+bi)x} + B\ e^{(a-bi)x} = e^{ax}\left(Ae^{bix} + Be^{-bix}\right)$
   $e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) = P\ e^{ax} \sin(bx + Q)$
   $= Pe^{ax} \cos(bx + R)$

Metode Operator

Integral khusus persamaan Diferensial $F(D)\ y = Q$ dengan Koefisien-koefisien konstan dinyatakan dengan $\frac{1}{F(D)} Q$. Untuk bentuk-bentuk tertentu

Q pekerjaan yang dilibatkan dalam menghitung simbol ini dapat dipandang secara sederhana, sebagai berikut :

Persamaan difrensial : (Ayress, 1984)

$$F(D)y = Q \quad \text{maka} \quad y = \frac{1}{F(D)}\,Q$$

$$y = \frac{1}{D-m_1}\,\frac{1}{D-m_2}\,\frac{1}{D-m_2}\cdots\cdots\frac{1}{D-m_n}Q$$

$$y = e^{m_1 x}\int e^{(m_2-m_1)x}\int e^{(m_3-m_2)x}$$

$$\int\cdots\int e^{(m_n-m_{n-1})x}\int Q\,e^{-m_n x}\,(dx)^n$$

Persamaan difrensial:

$$F(D)y = Q \quad \text{maka} \quad y = \frac{1}{F(D)}\,Q$$

a. jika Q berbentuk e^{ax}

$$y = \frac{1}{F(D)}\,e^{ax} = \frac{1}{F(a)}\,e^{ax} \quad F(a) \neq 0$$

b. jika Q berbentuk $\sin(ax+b)$ atau $\cos(ax+b)$

$$y = \frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)$$
$$F(-a^2) \neq 0$$

$$y = \frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)$$
$$F(-a^2) \neq 0$$

c. jika Q berbentuk x^m

$$y = \frac{1}{F(D)}\,x^m = \left[a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m\right]$$
$$x^m, \quad a_0 \neq 0$$

d. jika Q berbentuk e^{ax} V(x)

$$y = \frac{1}{F(D)}\,e^{ax}\,V(x) = e^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}\,V(x)$$
$$F(a) \neq 0$$

e. jika Q berbentuk x. V(x)

$$y = \frac{1}{F(D)}\,x.V(x) = x\,\frac{1}{F(D)}\,V(x) - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2}\,V(x)$$

3. PEMBAHASAN

3.1 Solusi Penyelesaian Persamaan Diferensial orde dua dengan PD Linear homogen-takhomogen.

Langkah-langkah solusi penyelesaian PD orde dua adalah:

1) Menentukan solusi umum PD Homogen $ay'' + by' + cy = g(x)$
   Solusi umum $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
2) Menentukan solusi PD Tak Homogen $ay'' + by' + cy = g(x)$
   lihat bentuk $g(x)$ sesuaikan dengan tabel 1 dan lihat kesamaan bentuk dengan solusi PD homogen untuk menentukan solusi umum y_p kemudian subtitusikan y_p, y_p', y_p'' pada PD tak homogen sehingga diperoleh solusi khusus y_p
3) Menentukan solusi umum PD Tak Homogen: $y = y_h + y_p$

3.2 Solusi Penyelesaian Persamaan Diferensial orde dua dengan Metode Teknik Operator-D

Langkah-langkah solusi penyelesaian PD orde dua dengan T.Operator-D:

1) Mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)\,y_p = Q$
2) Mengeliminasikan persamaan untuk menentukan nilai y_p yaitu: $y_p = \frac{1}{F(D)} Q$
3) Menentukan fungsi komplementer dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks.
4) Menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator-D untuk solusi umum.
5) Diperoleh solusi umum dari sistem persamaan diferensial orde dua yaitu : $y = F.\,komplementer + Integral.Khusus$

3.3 Studi Kasus Solusi Penyelesaian PD Orde Dua dengan Sistem Persamaan Diferensial Homogen-Tak Homogen

Diberikan **kasus 1:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$$y'' - 2y' + y = 3\,e^x + x^2$$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD homogen $y'' - 2y' + y = 0$

Persamaan karakteristik:

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

Akar-akar persamaan karakteristik:

$$m_1 = m_2 = 0$$

Solusi Umum : $y_h = C_1\,e^x + C_2\,xe^x$

Langkah 2 : Menentukan Solusi PD Tak Homogen: $y'' - 2y' + y = 3\,e^x + x^2$

$f(x) = 3\,e^x + x^2$ Sesuai Tabel 1:

$$y_p = C_1 e^x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

suku pada yaitu e^x adalah solusi ganda PD homogen, solusi umum PD homogeny menjadi :

$$y_p = C_1\,x^2 e^x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

sehingga

$$y_p' = 2C_1 xe^x + C_1\,x^2 e^x + 2\,C_2 x + C_3$$

$$y_p'' = 2C_1 e^x + 4C_1 xe^x + C_1\,x^2 e^x + 2C_2$$

Subtitusi: $y_p,\ y_p',\ y_p''$ kepersamaan awal sehingga didapatkan:

$$2C_1 e^x + 4C_1 xe^x + C_1\,x^2 e^x + 2C_2 - 4C_1 xe^x - 2C_1 x^2 e^x - 4C_2 x - 2C_3 + C_1 x^2 e^x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 = 3e^x + x^2$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta :

$$C_1 = 3/2,\ C_2 = 1,\ C_3 = 4,\ C_4 = 6$$

Solusi umum PD takhomogen:

$y_p = C_1\, x^2 e^x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

$y_p = \frac{3}{2}\, x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$

Langkah 3 : Menentukan Solusi PD :

$y = y_h(x) + y_p(x)$

$y = C_1\, e^x + C_2\, e^x + \frac{3}{2}\, x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$

Diberikan **kasus 2:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$y'' + 4y' + 4y = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD homogen $y'' + 4y' + 4y = 0$

Persamaan karakteristik:

$m^2 + 4m + 4 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik:

$m_1 = m_2 = -2$

Solusi Umum : $y_h = C_1\, e^{-2x} + C_2\, x\, e^{-2x}$

Langkah 2 : Menentukan Solusi PD Tak Homogen:

$y'' + 4y' + 4y = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$

$f(x) = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$ Sesuai Tabel 1:

$y_p = Ce^{-2x} + K \cos 2x + M \sin 2x$

suku pada yaitu e^x adalah solusi ganda PD homogen, solusi umum PD homogen menjadi :

$y_p = C\, x^2 e^{-2x} + K \cos 2x + M\, \sin\, 2x$

sehingga:

$y_p' = 2Cxe^{-2x} - 2C\, x^2 e^{-2x} - 2K \sin\, 2x$
$\quad + 2M \cos 2x$

$y_p'' = 2\; Ce^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4C\, x^2 e^{-2x}$
$\quad - 4K \cos 2x - 4M \sin\, 2x$

Subtitusi: y_p, y_p', y_p'' kepersamaan awal sehingga didapatkan:

$2\; Ce^{-2x} - 8\,Cxe^{-2x} + 4\,C\, x^2 e^{-2x} - 4K \cos 2x$
$-4M \sin\, 2x + 8Cxe^{-2x} - 8Cx^2 e^{-2x} - 8K \sin\, 2x$
$+8M \cos 2x + 4Cx^2 e^{-2x} + 4K \cos 2x$
$+4M \sin\, 2x = 2e^{-2x} + \sin\, 2x$
$2\; Ce^{-2x} + (-4K + 8M + 4K) \cos 2x$
$+(-4M - 8K + 4K) \sin\, 2x = 2e^{-2x} + \sin\, 2x$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta :

$C = 1,\ K = -\frac{1}{10},\ M = 0$

Solusi umum PD takhomogen:

$y_p = C\, x^2 e^{-2x} + K \cos 2x + M \sin\, 2x$

$y_p = x^2 e^{-2x} - \frac{1}{10} \cos 2x$

Langkah 3 : Menentukan Solusi PD:

$y = y_h(x) + y_p(x)$

$y = C_1\, e^{-2x} + C_2 x\, e^{-2x} + x^2 e^{-2x} - \frac{1}{10} \cos 2x$

Diberikan **kasus 3:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$y'' + 2y' + 5y = 4\, e^{2x} + 3 \sin\, 2x + 5x$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD homogen $y'' + 2y' + 5y = 0$

Persamaan karakteristik:

$m^2 + 2m + 5 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik:

$$m_1 = -1+2i,\ m_2 = -1-2i$$

Solusi Umum :

$$y_h = e^{-x}\,(A\cos 2x + B\sin\, 2x)$$

Langkah 2 : Menentukan Solusi PD Tak Homogen:

$$y'' + 2y' + 5y = 4\,e^{2x} + 3\sin\, 2x + 5x$$

$$f(x) = 4\,e^{2x} + 3\sin\, 2x + 5x$$

Sesuai Tabel 1:

$$y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x + C_3 + K\cos 2x + M\sin\, 2x$$

sehingga

$$y'_p = 2C_1 e^{2x} + C_2 - 2K\sin\, 2x + 2M\cos 2x$$

$$y''_p = 4\,Ce^{2x} - 4K\cos 2x - 4M\sin\, 2x$$

Subtitusi: $y_p,\ y'_p,\ y''_p$ kepersamaan awal sehingga didapatkan:

$$4C_1 e^{2x} - 4K\cos 2x - 4M\sin\, 2x + 4C_1 e^{2x}$$
$$+ 2C_2 - 4K\sin\, 2x + 4M\cos 2x + 5C_1 e^{2x}$$
$$+ 5C_2 + 5C_3 + 5K\cos 2x + 5M\sin\, 2x$$
$$= 4e^{2x} + 3\sin\, 2x + 5x$$

$$13\,C_1 e^{2x} + 5C_2 x + 2C_2 + 5C_3 + (-4K + +5K$$
$$+ 4M)\cos 2x + (-4M + 5M - 4K)\sin\, 2x$$
$$= 4e^{2x} + 3\sin\, 2x + 5x$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta:

$$C_1 = \frac{4}{13},\ C_2 = 1,\ C_3 = -\frac{2}{5},\ K = -\frac{12}{13},\ M = \frac{3}{17}$$

Solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x + C_3 + K\cos 2x + M\sin\, 2x$$

$$y_p = \frac{4}{13}e^{2x} + x - \frac{2}{5} - \frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin\, 2x$$

Langkah 3 : Menentukan Solusi PD:

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y = e^{2x}\left(A\cos 2x + B\sin\, 2x\right) + \frac{4}{13}e^{2x}$$
$$+ x - \frac{2}{5} - \frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin\, 2x$$

3.4 Studi Kasus Solusi SPD Orde Dua dengan Metode Operator

Diberikan **kasus 4:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$$y'' - 2y' + y = 3\,e^x + x^2$$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD dengan Teknik Operator:

$$D^2 y + 2Dy + y = 0 \Rightarrow$$
$$\left(D^2 + 2D + 1\right)y = 0$$

Fungsi Komplementer: $D^2 + 2D + 1 = 0$

Akar-akar fungsi komplementer:

$$D_1 = D_2 = 1$$

Solusi Umum : $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

Langkah 2 : Menentukan IK:

$$y'' - 2y' + y = 3\,e^x + x^2$$

$$D^2 y + 2Dy + y = 3e^x + x^2$$
$$\left(D^2 + 2D + 1\right)y = 3e^x + x^2$$

Untuk menentukan nilai $y(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D)}\,e^{ax} = \frac{1}{F(a)}\,e^{ax} \quad F(a) \neq 0$$

$$y = \frac{1}{F(D)}\, x^m = \left[a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m\right] x^m$$
$$(a_0 \neq 0)$$

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\left(3e^x + x^2\right)$$
$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\, 3e^x + \frac{1}{D^2 - 2D + 1}\, x^2$$
$$y = 3e^x \int e^x\, e^{-x} dx dx + \left[1 + 2D + 3D^2 + \ldots\right] x^{2\,t}$$
$$y = \frac{3}{2} x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$$

Jawaban umum :

$$y = F.\,Komplementer + Integral\ Khusus$$
$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x + x^2 + 4x + 6$$

Diberikan **kasus 5:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$$y'' + 4y' + 4y = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD dengan Teknik Operator:

$$D^2 y + 4Dy + 4y = 0 \Rightarrow$$
$$\left(D^2 + 4D + 4\right) y = 0$$

Fungsi Komplementer: $D^2 + 4D + 4 = 0$

Akar-akar fungsi komplementer:

$$D_1 = D_2 = -2$$

Solusi Umum : $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Langkah 2 : Menentukan IK:

$$y'' + 4y' + 4y = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$$

$$D^2 y + 4Dy + 4y = 2e^{-2x} + \sin\, 2x$$
$$\left(D^2 + 4D + 4\right) y = 2e^{-2x} + \sin\, 2x$$

Untuk menentukan nilai $y(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y = \frac{1}{F(D)}\, e^{ax} = \frac{1}{F(a)}\, e^{ax} \quad F(a) \neq 0$$

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax + b)$$
$$= \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax + b) \quad F(-a^2) \neq 0$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}\,(\ 2e^{-2x} + \sin 2x\ )$$

$$y = 2\left[e^{-2x} \int e^{(-2+2)x} \int e^{-2x} e^{2x} (dx)^2\right] + \frac{1}{4D}(\sin\ 2x)$$
$$y = x^2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x$$

Jawaban umum :

$$y = F.\,Komplementer + Integral\ Khusus$$
$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x$$

Diberikan **kasus 6:**

Tentukan Penyelesaaian Umum PD berikut:

$$y'' + 2y' + 5y = 4\, e^{2x} + 3 \sin\, 2x + 5x$$

Penyelesaian:

Langkah 1 : Menentukan solusi PD dengan Teknik Operator:

$$D^2 y + 2Dy + 5y = 0 \Rightarrow$$
$$\left(D^2 + 2D + 5\right) y = 0$$

Fungsi Komplementer: $D^2 + 2D + 5 = 0$

Akar-akar fungsi komplementer:

$$D_{12} = -1 \pm 2i$$

Solusi Umum:

$$y = e^{-x}\left(A \cos 2x + B \sin\, 2x\right)$$

Langkah 2 : Menentukan IK:

$$y'' + 4y' + 4y = 2\, e^{-2x} + \sin\, 2x$$

$$D^2y+4Dy+4y=2e^{-2x}+\sin\,2x$$
$$\left(D^2+4D+4\right)y=3e^{-2x}+\sin\,2x$$

Untuk menentukan nilai $y(t)$ dengan sifat metode operator:

$$y=\frac{1}{F(D)}\,e^{ax}=\frac{1}{F(a)}\,e^{ax}\quad F(a)\neq 0$$

$$y=\frac{1}{F(-a^2)}\,\sin\left(ax+b\right)\quad F(-a^2)\neq 0$$

$$y=\frac{1}{F(D)}\,x^m=\left[a_0+a_1D+a_2D^2+\ldots+a_mD^m\right]x^m$$

$$y=\frac{1}{D^2+2D+5}\left(4e^{2x}+3\sin\,2x+5x\right)$$

$$y=\frac{1}{D^2+2D+5}\,(4e^{2x})+\frac{1}{D^2+2D+5}\left(3\sin\,2x\right)+\frac{1}{D^2+2D+5}\left(5x\right)$$

$$y=\frac{1}{2^2+2.2+5}\,(4e^{2x})+\frac{1}{(-2^2)+2D+5}\left(3\sin\,2x\right)+\left[\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\,D-\ldots\right]\left(5x\right)$$

$$y=\frac{4}{13}\,e^{2x}+\frac{1}{2D+1}\,\frac{2D-1}{2D-1}\left(3\sin\,2x\right)+\frac{1}{5}\left(5x\right)-\frac{2}{25}\,D\left(5x\right)$$

$$y=\frac{1}{13}e^{2x}+x-\frac{2}{5}-\frac{12}{17}\cos 2x+\frac{3}{17}\sin\,2x$$

Jawaban umum :

$$y=F.\,Komplementer+Integral\ Khusus$$

$$y=e^{-x}\left(A\cos 2x+B\sin\,2x\right)+\frac{1}{13}e^{2x}+x-\frac{2}{5}-\frac{12}{17}\cos 2x+\frac{3}{17}\sin\,2x$$

5. KESIMPULAN

Penyelesaian Persamaan Diferensial orde dua dengan PD Linear homogen-takhomogen.

Langkah-langkah penyelesaian PD orde dua dengan PD linear homogen-tak homogen adalah: menentukan solusi umum Persamaan diferensial Homogen $ay''+by'+cy=g(x)\Rightarrow ar^2+br+c=0$ sesuai dengan akar-akar persamaan karakteristik, kemudian subtitusikan $y_p,\,y_p',\,y_p''$ pada PD semula sehingga diperoleh solusi khusus y_p penyelesaaian umum PD orde-2: $y=y_h+y_p$

Langkah-langkah penyelesaian PD dua dengan Teknik Operator adalah mengubah sistem persamaan diferensial kedalam teknik operator yaitu $F(D)\,y_p=Q$, mengeliminasikan untuk menentukan nilai yaitu: $y_p=\dfrac{1}{F(D)}Q$ menentukan fungsi komplementer dalam menentukan akar-akar riil dan berbeda, akar-akar yang berulang dan akar-akar kompleks, menentukan integral khusus dengan menggunakan sifat-sifat teknik operator-D untuk solusi umum, sehingga diperoleh solusi umum dari sistemPD orde-2 yaitu : $y=F.\,komplementer+Integral\ \ khusus$

6. SARAN

Bagi pembaca yang tertarik dan untuk memperdalam disarankan membahas dan dapat mengkaji tentang solusi sistem persamaan diferensial linear orde dua dengan orde yang lebih tinggi dan dengan metode yang lain.

7. DAFTAR PUSTAKA

Ayress Frank, JR, Ph,D, 1984. Persamaan Diferensial, Seri Buku Schaum, Terjemahan Dr. Lily Ratna, Jakarta: Erlangga.

Anton, H dan C, Rorres, 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Terjemahan oleh R. Indriasari dan I. Harman. Jakarta: Erlangga.

Finizio, N dan G, Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Terjemahan oleh Dra. Widiarti. Santoso. Jakarta: Eerlangga.

Goode, S. W. 1991. *An Introduction to Differential Equations and Linear Algebra.* New York: Prentice-Hall International, Inc.

Purcell, E, J, D. Varberg, dan S, E, Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid 2 (Edisi Kedelapan)* Jakarta: Erlangga.

Shepley L. Ross. 1974. *Differentiaal Equations.* New York: Prentice-Hall International, Inc.